

Aula de 20

Curso de Física de
Berkeley volume 2,
página 195,

Leis de transformação do campo eletromagnético

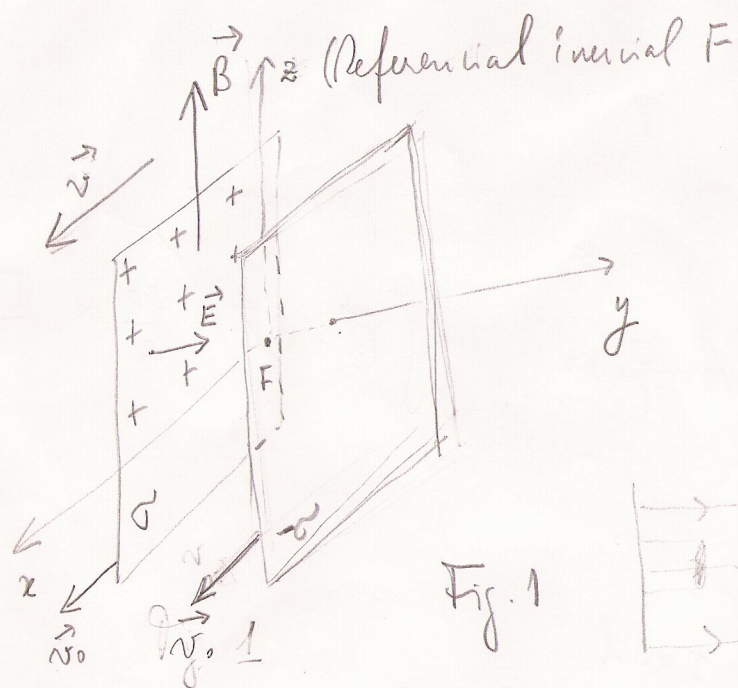


Fig. 1

Campo elétrico no
referencial F (ver Fig. 1):

$$\boxed{E_y = 4\pi\sigma} \quad \text{(sistema gaussiano)} \quad (1)$$

Atenção! Para converter do sistema gaussiano
para SI $\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}$, logo no SI

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Assumindo que a superfície c/ densidade
de carga σ se desloca com velocidade $\vec{v} = v_0 \hat{x}$,
(ver Fig. 1).

A densidade superficial de corrente

$$K_x = \sigma v_0$$

(2)

Lembrando que o campo entre as correntes

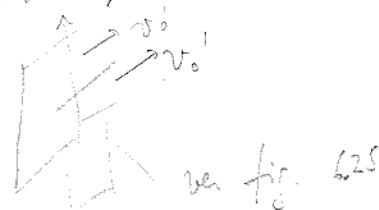
$$B_z = \frac{4\pi K_x}{c} = \frac{4\pi \sigma v_0}{c} \quad (3)$$

Novamente para correntes do sistema gaussiano
para SI $\frac{\mu_0}{4\pi} \rightarrow \frac{1}{c} \quad \mu_0 = \frac{4\pi}{c}$

$$B_z = \mu_0 K_x = \mu_0 \sigma v_0$$

Agora, suponha que o referencial F'
se mova, em relação a F , com velocidade
 $\vec{v}$ no sentido do x positivo.

A pergunta é: que campos serão medidos por um observador em F' ?



$$v_o' = \frac{v_o - v}{1 - v_o v / c^2} = c \frac{\beta_o - \beta}{1 - \beta_o \beta} \quad (4)$$

Curso de Física
de Berkeley, vol. 1, pág. 330

É preciso fazer revisão da transformação

de Lorentz? É uma transformação que torna a velocidade da luz independente do movimento da fonte

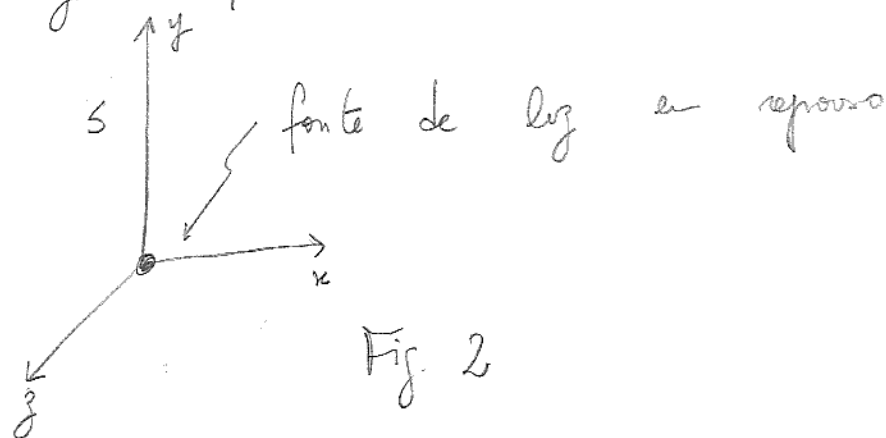


Fig. 2

pl uma fonte de luz emitida em $t=0$, a equação da frente

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

(5)

(ver fig. 3)

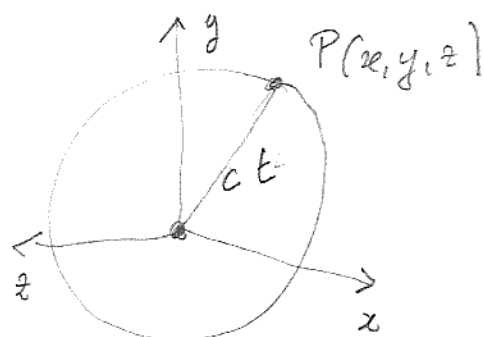
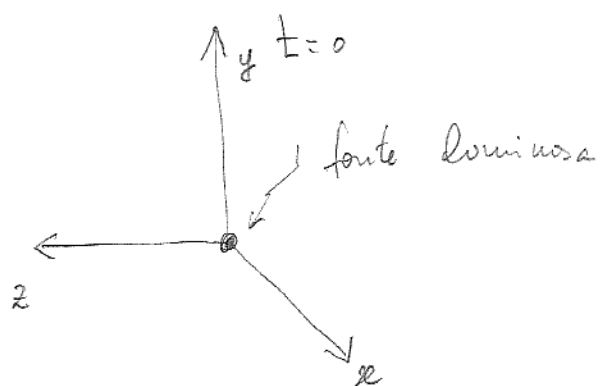


Fig. 3

Seja S' um sistema de referência. c/
 coordenadas e tempo medidos por observador dados
 por x', y', z' e t' . Então p/ um observador
 em S' , a frente de onda deve ser

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (6)$$

Suponha que S' se move em relação a
 S com velocidade V . Qual transformação
 de coordenadas entre x', y', z', t' e x, y, z, t
 que preserve nos 2 sistemas as Eqs. (5)
 e (6)?

Vamos tentar

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + ft \quad (7)$$

Tentamos usando a Eq. (7) na Eq. (6)

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2ft + c^2f^2x^2 \quad (8)$$

Assumindo $f = -\frac{V}{c^2}$, a Eq. (8) torna-

se

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - 2c^2 \frac{V}{c^2} xt + c^2 \frac{V^2}{c^4} x^2$$

ou

$$x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + y^2 + z^2 = c^2t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)$$

Observe que para $f = -\frac{V}{c^2}$ $1 - \frac{V^2}{c^2} = 1$

$$t' = t - \frac{V}{c^2} x \quad (9)$$

para absorver o fator $(1 - \frac{V^2}{c^2})$, a transformação pode ser finalmente dada por

por

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \quad (10)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$

Introduzindo a notação

$$\beta \equiv V/c \quad \rightarrow \quad V = \beta c \quad (11)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (12)$$

$$x' = \gamma (x - \beta c t)$$

$$y' = y$$

(13)

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \beta \frac{x}{c} \right)$$

transformação de Lorentz !

Oval e'

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = ?$$

Das eqs. (13) temos que

(14)

$$dx' = \gamma (dx - \beta c dt)$$

(15)

$$dt' = \gamma \left(dt - \beta \frac{dx}{c} \right)$$

logo

$$v'_x = \frac{\gamma (dx - \beta c dt)}{\gamma (dt - \beta \frac{dx}{c})} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \beta \frac{dx}{c dt}} = \frac{v_x - \beta c}{1 - \beta \frac{v_x}{c}}$$

ou como $\beta \equiv \frac{V}{c}$

$$\boxed{v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}}$$

(16)

A eq. (16) é exatamente a Eq. (4)!

Então

$$v_0 \rightarrow v_x$$

$$v \rightarrow V$$

$$v_0' = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}$$

No referencial em repouso das cargas a densidade de carga é $\sigma \gamma_0^{-1}$ (contração de Lorentz). No

$$\sigma \left(1 - v_0^2/c^2\right)^{1/2}$$

Sistema de referência no sistema F'

$$\sigma' = \sigma \frac{\gamma_0'}{\gamma_0}$$

$$\frac{\sigma'}{\gamma_0'} = \frac{\sigma}{\gamma_0} \quad (17)$$

onde

$$\gamma_0' = (1 - v_0'^2/c^2)^{-1/2} \quad \beta = v/c \quad (18)$$

Podemos reescrever a Eq. (18) como

$$\gamma_0' = \left[1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1 - \beta_0 \beta}{\left[(1 - \beta_0 \beta)^2 - (\beta_0 - \beta)^2 \right]^{1/2}}$$

Substituindo aqui $v_0' = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}$

$$= (1 - \beta_0 \beta) \frac{1}{\left[(1 - \beta_0 \beta)^2 - (\beta_0 - \beta)^2 \right]^{1/2}}$$

$$= (1 - \beta_0 \beta) \frac{1}{\left[1 - 2\cancel{\beta_0 \beta} + \beta_0^2 \beta^2 - \beta_0^2 + 2\cancel{\beta_0 \beta} - \beta^2 \right]^{1/2}}$$

$$= (1 - \beta_0 \beta) \frac{1}{\left[1 + \beta_0^2 \beta^2 - \beta_0^2 - \beta^2 \right]^{1/2}}$$

Finalmente

$$\gamma_0' = (1 - \beta_0 \beta) \frac{1}{[(1 - \beta^2) - \beta_0^2 (1 - \beta^2)]^{1/2}}$$

$$= (1 - \beta_0 \beta) \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2} (1 - \beta_0^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{\gamma_0' = (1 - \beta_0 \beta) \gamma_0 \gamma} \quad (19)$$

Utilizando Eq (19) na Eq. (17), fica

mas como

$$\boxed{\alpha' = \alpha (1 - \beta_0 \beta) \gamma} \quad (19)$$

A densidade superficial de
corrente no referencial F' e^-

$$K' = \sigma' v_0' = \sigma \cancel{\gamma(1-\beta_0\beta)} c \frac{\beta_0 - \beta}{\cancel{1-\beta_0\beta}}$$

ou

$$K' = \sigma \gamma (v_0 - v)$$

(20)

então

$$E_y' = 4\pi\sigma' = \gamma \left[4\pi\sigma - \left(\frac{4\pi\sigma v_0}{c} \right) \left(\frac{v}{c} \right) \right] \text{ CGS}$$

$$E_y' = \sigma' / \epsilon_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (1 - \beta_0\beta) \gamma = \gamma \left[E_y - \frac{\sigma v_0}{\epsilon_0 c} \left(\frac{v}{c} \right) \right] \text{ S.I.}$$

$$E_y' = \gamma [E_y - \beta B_z]$$

(21)

$$= \gamma \left[E_y - \frac{\sigma v_0}{\epsilon_0 c} \beta \right]$$

M_0

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.85 \times 10^{-12}}}$$

$$B_z' = \frac{4\pi}{c} K' = \frac{4\pi}{c} \sigma \gamma (v_0 - v)$$

$$= \gamma \left[\overbrace{\frac{4\pi\sigma v_0}{c}}^{B_z} - \overbrace{4\pi\sigma \left(\frac{v}{c}\right)}^{E_y} \right]$$

or

$$B_z' = \gamma [B_z - \beta E_y]$$

(22)

$$V = \beta c$$

$$\gamma^2 (x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2 = c^2 \gamma^2 \left(t - \beta \frac{x}{c} \right)^2$$

$$\gamma^2 \left(x^2 - 2\beta xct + \beta^2 c^2 t^2 \right) + y^2 + z^2 =$$

$$c^2 \gamma^2 \left(t^2 - 2\beta \frac{x}{c} t + \frac{\beta^2 x^2}{c^2} \right)$$

$$x^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) + y^2 + z^2 + \cancel{\gamma^2 (2\beta xct)} - \cancel{\gamma^2 (2\beta xct)}$$

$$= c^2 \gamma^2 t^2 - \beta^2 c^2 t^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \gamma^2 (1 - \beta^2)$$